О резонансных случаях в задачах устойчивости в некоторых моделях точечных вихрей

Л. Г. Куракин[1,2,3], *И. В. Островская*[3]

[1] ИВП РАН, Москва
[2] ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ
[3] ИММ и КН ЮФУ, Ростов-на-Дону

- Куницын, А. Н., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Серия «Общая механика». Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1979. С. 58–139.
- Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
- Kilin A. A., Borisov, A. V., and Mamaev, I. S., *Dynamics of point vortices inside and outside a circular region*. Fundamental and Applied Problems of Vortex Theory, Inst. Komp'yut. Issled., Moscow, 2003

Задача устойчивости Томсоновского вихревого N-угольника

1. внутри круговой области;
2. вне круговой области;
    - в случае нулевой циркуляции
    - в случае произвольной циркуляции

Резонанс 1:1 в задаче устойчивости вихревого квадруполя

Резонансы в гамильтоновой системе с 2 степенями свободы

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{\overline{z}}_k = 2i\frac{\partial H(z,\overline{z})}{\partial z_k}, \quad \dot{z}_k = -2i\frac{\partial H(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}_k} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H = H_0 + H_2 + H_3 + .$$

Квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$H_2 = -\omega_1|Z_1|^2 + \omega_2|Z_2|^2 \tag{2}$$

где $Z_j = \xi_j + i\zeta_j$ — переменные,

$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 > 0,$$

$\sigma_1^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\omega_1$, $\sigma_2^{\pm} = \pm\frac{1}{2}\omega_2$,— собственные значения матрицы линеаризации. В проблеме устойчивости нулевого равновесия гамильтоновой системы возникает случай резонанса $n : m$, если

$$n\omega_1 = m\omega_2 \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Величина $k = n + m$ — порядок резонанса.

Вихри внутри круговой области

1. Уравнения движения

Движение системы N одинаковых точечных вихрей интенсивности $\varkappa$ внутри круговой области радиуса R описывается системой уравнений

$$\dot{\overline{z}}_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{\varkappa}{z_k - z_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varkappa}{z_k - \widehat{z}_j}, \qquad (3)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $\overline{z}_k = x_k - iy_k$, $k = 1, \dots, N$;
x_k, y_k — декартовы координаты k-го вихря;
$\widehat{z}_k = \dfrac{R^2}{\overline{z}_k}$ — отражение k-го вихря границей круговой области.
Гамильтониан системы (3) имеет вид

$$H = -\frac{\varkappa^2}{4\pi} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant N} \ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \frac{\varkappa^2}{8\pi} \sum_{j,k=1}^{N} \ln\left|R^2 - z_j\overline{z}_k\right|^2 \qquad (4)$$

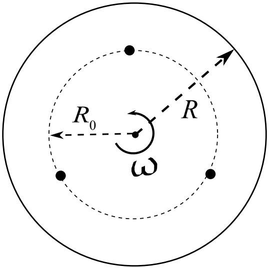
2. Стационарное вращение Томсоновского вихревого N-угольника

Стационарное вращение системы N вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного N-угольника

$$z_k(t) = e^{i\omega t} u_k, \qquad u_k = R_0 e^{2\pi i (k-1)/N}, \tag{5}$$

Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2}\left(\frac{2N}{1-p^N} - N - 1\right), \qquad p = \frac{R_0^2}{R^2} < 1 \tag{6}$$



Исследуется задача устойчивости Томсоновского вихревого N-угольника. В случае модели Кирхгофа эта задача была поставлена W. Thomson (Кельвин).

3. Уравнения возмущений

Замена переменных

$$z_k = \sqrt{R_0^2 + 2r_k}\, e^{i(\frac{2\pi i}{N}(k-1)+\theta_k} e^{i\omega t} \tag{7}$$

приводит к уравнениям возмущений относительного движения

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E(\boldsymbol{\rho})}{\partial \theta_k}, \qquad \dot{\theta}_k = \frac{\partial E(\boldsymbol{\rho})}{\partial r_k}, \qquad \boldsymbol{\rho} = (r_1, \ldots, r_N, \theta_1, \ldots, \theta_N), \tag{8}$$

с гамильтонианом

$$E(\boldsymbol{\rho}) = H(\boldsymbol{\rho}) + \frac{\omega}{2}\sum_{k=1}^{N}(R_0^2 + 2r_k). \tag{9}$$

Не нарушая общности, здесь и далее $\varkappa = 1$.
Решению (5), (6) соответствует непрерывное семейство равновесий $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{2N} :\ r_1 = \cdots = r_N = 0,\ \theta_1 = \cdots = \theta_N\}. \tag{10}$$

Орбитальная устойчивость Томсоновского вихревого N-угольника — это устойчивость семейства равновесий $\mathcal{C}$.

4. Ряд Тейлора гамильтониана системы

Разложение в ряд Тейлора гамильтониана $E(\boldsymbol{\rho})$ имеет вид

$$E(\boldsymbol{\rho}) = E_0 + E_2(\boldsymbol{\rho}) + E_3(\boldsymbol{\rho}) + \ldots, \qquad (11)$$

линейные слагаемые E_1 равны нулю.

Квадратичная форма E_2 равна

$$E_2 = \langle \mathbf{S}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle, \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & \frac{1}{2}\mathbf{G}_0 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{G}_0 & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

Матрица линеаризации $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\mathbf{G}_0 & 2\mathbf{F}_2 \\ -2\mathbf{F}_1 & -\mathbf{G}_0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

5. Матрицы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ и $\mathbf{G}_0$

Симметричные матрицы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ и кососимметричная матрица $\mathbf{G}_0$ — циркулянтные:

$$\mathbf{F}_m = f_{m0}\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{N-1} f_{mj}\mathbb{C}^j, \quad \mathbf{G}_0 = \sum_{j=1}^{N-1} g_{0j}\mathbb{C}^j, \tag{14}$$

$$\mathbb{C} = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{N}, \qquad c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i+1, i = 1, \dots, N-1; \\ 1, & \text{если } i = N, j = 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Векторы φ_k — собственные векторы, а λ_{1k}, λ_{2k} and $i\lambda_{0k}$ — собственные значения матриц $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{G}_0$

$$\mathbf{F}_m\varphi_k = \lambda_{mk}\varphi_k, \qquad \mathbf{G}_0\varphi_k = i\lambda_{0k}\varphi_k$$

$$\varphi_k = (1, e^{\frac{2i\pi k}{N}}, e^{\frac{4i\pi k}{N}}, \dots, e^{\frac{2i\pi k(N-1)}{N}}), \qquad k = 1, \dots, N$$

$$\lambda_{mk} = \sum_{j=1}^{N-1} f_{mj}e^{2\pi ijk/N}, \qquad i\lambda_{0k} = \sum_{j=1}^{N-1} g_{0j}e^{2\pi ijk/N}$$

Явные формулы собственных значений были получены Хавелоком (1931).

6. Собственные значения матриц **S** и **L**

Собственные значения матрицы **S** — корни полиномов

$$\begin{aligned} &P(N,k,\Lambda) = \Lambda^2 + p_1(N,k)\Lambda + p_0(N,k), \\ &p_1(N,k) = -(\lambda_{1k} + \lambda_{2k}), \quad p_0(N,k) = \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Собственные значения матрицы линеаризации **L**:

$$\sigma_k^{\pm} = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{16}$$

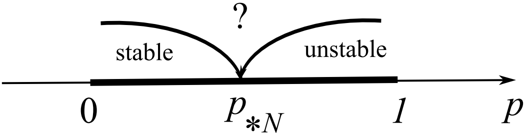
7. Критерий устойчивости

1. Томсоновский N-угольник неустойчив, если матрица линеаризации $\mathbf{L}$ имеет хотя бы одно собственное значение в правой полуплоскости.
2. Томсоновский N-угольник орбитально устойчив в точной нелинейной постановке, если все собственные значения матрицы $\mathbf{S}$ положительны, кроме простого нуля.
3. Для решения задачи устойчивости требуется нелинейный анализ, если условия 1–2 не выполнены. Для её решения используется теория нормальных форм и теория устойчивости равновесий гамильтоновых систем в резонансных случаях.
   Куницын, А. Н., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях (1979). Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике (1978).

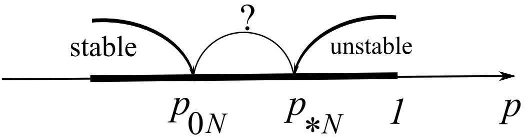
T. H. Havelock (1931)

$$\begin{cases} N \geq 7 \\ 2 \leq N \leq 6, \quad p_{*N} < p < 1 \end{cases}$$ **неустойчивость**

L. G. Campbell (1981)



N=2, 4, 6



N=3, 5

Критические значения параметра p

N=2	$p_{*2} \approx 0.213740$
N=3	$p_{03} \approx 0.304064$, $p_{*3} \approx 0.321281$
N=4	$p_{*4} \approx 0.329840$
N=5	$p_{05} \approx 0.341038$, $p_{*5} \approx 0.346101$
N=6	$p_{*6} \approx 0.299121$

8. Нелинейный анализ в случае $N = 3$, $p_{03} \leqslant p \leqslant p_{*3}$
Редукция

Нормализация квадратичной части гамильтониана E с использованием линейной замены переменных

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix} \tag{17}$$

приводит к системе с циклической переменной ζ_3.

Здесь $\mathbf{A}$ — симплектическая матрица, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$.

Полагая $\xi_3 = 0$, получаем гамильтонову систему *редуцированную на одну степень свободы*. редуцированный гамильтониан имеет вид

$$W(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) = E(\rho(\xi_1, \xi_2, 0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)). \tag{18}$$

9. Нормализованная квадратичная часть редуцированного гамильтониана в случае $N = 3$ при $p_{03} < p < p_{*3}$

Если $p \in (p_{03}, p_{*3})$, квадратичная часть редуцированного гамильтониана имеет вид

$$W_2 = -\omega_1 |Z_1|^2 + \omega_2 |Z_2|^2 \tag{19}$$

где $Z_j = \xi_j + i\zeta_j$,

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\sigma_1^+ > 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\sigma_2^+ > 0, \tag{20}$$

где σ_k^+ заданы формулой (16).
Существуют два резонанса: $\omega_2 = 3\omega_1$ в точке $p_{1:3}$ и $\omega_2 = 2\omega_1$ в точке $p_{1:2}$.

Случай $N = 3$, $p \in (p_{03}, p_{*3})$

Пусть $p \neq p_{1:2}$ и $p \neq p_{1:3}$.
Редуцированный гамильтониан нормализованный до слагаемых четвертой степени имеет вид

$$W = -\omega_1|Z_1|^2 + \omega_2|Z_2|^2 + c_{20}|Z_1|^4 + c_{11}|Z_1|^2|Z_2|^2 + c_{02}|Z_2|^4 + \ldots \quad (21)$$

Справедливо неравенство

$$c_{20}\omega_1^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_2^2 \neq 0. \quad (22)$$

Тогда согласно теореме Колмогорова–Арнольда–Мозера, нулевое равновесие гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом W устойчиво по Ляпунову.

В резонансных случаях $p = p_{1:2}$ и $p = p_{1:3}$, редуцированный гамильтониан, нормализованный до слагаемых четвертого порядка, имеет тот же вид, что что и гамильтониан (21), поскольку соответствующие им резонансные слагаемые

$$Z_1^3 Z_2,\ Z_1^{*3} Z_2^* \quad \text{при } p = p_{1:3} \quad \text{и} \quad Z_1^2 Z_2,\ Z_1^{*2} Z_2^* \quad \text{при } p = p_{1:2}$$

отсутствуют. Тогда согласно КАМ теории, нулевое равновесие устойчиво по Ляпунову.

Резонансный случай двукратного нуля при $N = 3,\ p = p_{03}$

Пусть $p = p_{03}$. Тогда

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 \neq 0.$$

и имеет место резонансный случай двукратного нуля (диагонализируемый случай)
Гамильтониан нормализованный до слагаемых третьей степени имеет вид

$$\begin{aligned} W &= W_2 + W_3 + \dots \\ W_2 &= \omega_2(\xi_2^2 + \zeta_2^2) \\ W_3 &= c(-{\zeta_1}^3 + 3\,\zeta_1\,{\xi_1}^2) + \dots \end{aligned} \tag{23}$$

Форма W_3 на ядре квадратичной части W_2 не равна нулю тождественно:

$$W_3(\xi_1, 0, \zeta_1, 0) = c\,(-{\zeta_1}^3 + 3\,\zeta_1\,{\xi_1}^2), \quad c \neq 0$$

Согласно результатам Сокольского А. Г. нулевое равновесие не устойчиво.

Резонанс $1:1$, недиагонализируемый случай при $p = p_{*3}$, $N = 3$

Редуцированный гамильтониан, нормализованный до слагаемых третьей степени, имеет вид

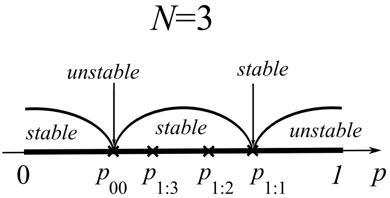
$$W = \lambda_{01}(p_{*3})(\zeta_2\xi_1 - \xi_2\zeta_1) + \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \mathbb{A}(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \dots, \qquad (24)$$

$$\mathbb{A} \approx 0.2911$$

Нулевое равновесие редуцированной системы формально устойчиво поскольку коэффициент $\mathbb{A}$ положителен.

Sokolsky A. G., Lerman, L. M.

Диаграмма устойчивости

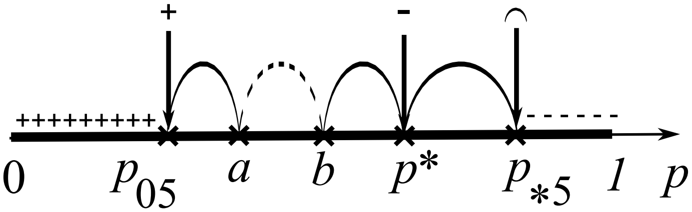


$p_{00} = p_{03}$, $p_{1:3} \approx 0.316897$, $p_{1:2} \approx 0.319327$, $p_{1:1} = p_{*3}$

p_{00} — двукратный ноль, диагонализированный случай, $p_{k:m}$ — резонанс $k : m$, $p_{1:1}$ — резонанс $1 : 1$ (жорданова клетка)

Kurakin, L. G., Dokl. Phys. 2004, RCD 2010.

Диаграмма устойчивости при $N = 5$



Орбитальная устойчивость — $p \in (0, p_{05})$ $(++)$;
Формальная устойчивость — $p \in [p_{05}, a) \cup (b, p^*) \cup (p^*, p_{*5}]$ (сплошная дуга);
Устойчивость для почти всех начальных данных — $p \in [a, b]$,
$a = 0.3412$, $b = 0.3429$ (пунктирная дуга);
Неустойчивость — при $p = p^*$ (резонанс $1:2$) и при $p \in (p_{*5}, 1)$ (--).

Kurakin, L. G., Dokl. Phys. 2004, RCD 2012.

Резонанс $1:2$ при $N = 5$

Если $p = p^* \approx 0.344379$, тогда

$$\omega_1 = 2\omega_2 = 0.2471$$

и имеет место резонанс 1:2.
Редуцированный гамильтониан имеет вид

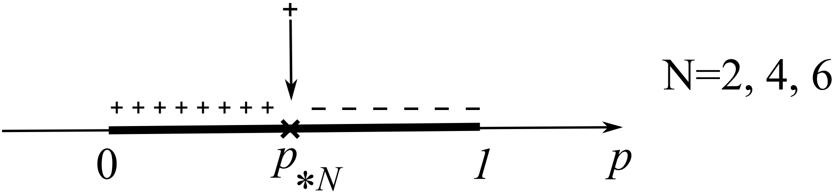
$$W = 2\omega_2|z_1|^2 - \omega_2|z_2|^2 + \omega_3|z_3|^2 + \omega_4|z_4|^2 + Im\left(c\, z_2{}^2\, z_1\right) + \dots \qquad (25)$$

Форма третьей степени содержит резонансные слагаемые

$$cz_2^2 z_1, \qquad c = 4.3329 \neq 0.$$

Согласно результатам А.П. Маркеева нулевое равновесие редуцированной системы неустойчиво.

$N = 2,\ 4,\ 6$



Резонанс двукратного нуля (жорданова клетка) $p = p_{*N}$

Kurakin, L. G., Dokl. Phys. 2004

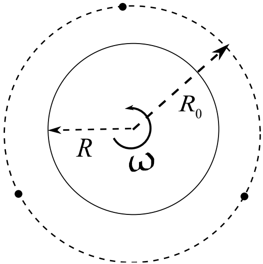
Вихри вне круга
Случай нулевой циркуляции вокруг границы

Гамильтониан

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant N} \ln\left|z_j - z_k\right|^2 + \frac{1}{8\pi}\sum_{j,k=1}^{N} \ln\left|R^2 - z_j z_k^*\right|^2 - \frac{N}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\ln\left|z_k\right|^2$$

$$z_k(t) = e^{i\omega t}u_k, \qquad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/N},$$

$$\omega = \frac{1}{4\pi R_0^2}\left(3N - 1 - \frac{2N}{1-q^N}\right), \qquad q = \frac{R^2}{R_0^2} < 1$$

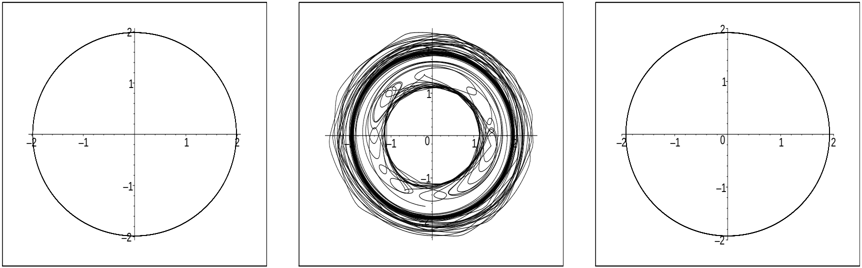


Линейный анализ: Havelock T. H. 1931

Нелинейный анализ: Kurakin L. G., Ostrovskaya I.V. SMJ 2010, RCD 2012

Расчет траекторий точечных вихрей при $q = q_{03}$, $N = 3$

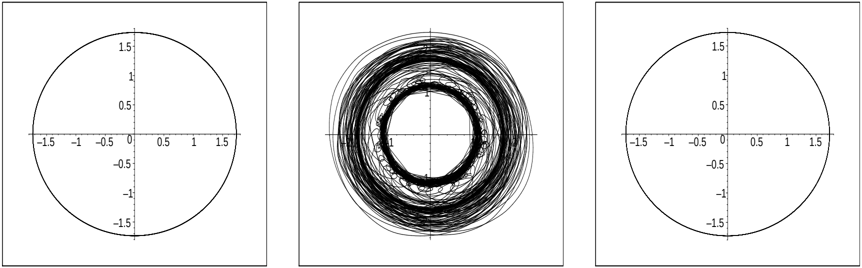
В точке $q = q_{03}$ возникает резонанс двукратного нуля (диагонализируемый случай, который приводит к неустойчивости.



a. $q = 0.2540$ b. $q = q_{03} \approx 0.2625$ c. $q = 0.2700$

Расчет траекторий точечных вихрей при $q = q_{1:2}$, $N = 5$

В точке $q = q_{1:2}$ резонанс $1 : 2$ приводит к неустойчивости.



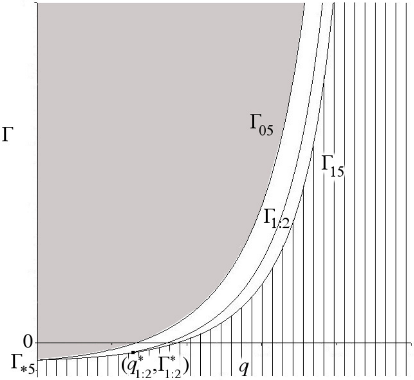
a. $q = 0.3320$ b. $q = q_{1:2} \approx 0.3333$ c. $q = 0.3340$

Случай произвольной циркуляции Γ вокруг цилиндра

Случай произвольной циркуляции Γ вокруг цилиндра рассмотрен в работе "Kurakin, L. G. and Ostrovskaya, I. V., *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 6"

В частности, для различных значений циркуляции Γ вокруг цилиндра изучены резонанс двукратного нуля (диагонализируемый случай) для $N = 3$ и резонанс $1 : 2$ для $N = 5$, которые приводят к неустойчивости.

Диаграмма устойчивости Томсоновского вихревого пятиугольника



Серый цвет — орбитальная устойчивость, вертикальная штриховка — неустойчивость, белый цвет — требуется нелинейный анали.
$\Gamma_{1:2}$ — случай резонанса 1 : 2. Вихревой пятиугольник неустойчив. Резонансная кривая $\Gamma_{1:2}$ пересекает резонансную кривую Γ_{15} в точке $(q^*_{1:2}, \Gamma^*_{1:2})$.

Уравнения движения системы $N+1$ точечных вихрей

Уравнения движения системы N одинаковых точечных вихрей единичной интенсивности и одного вихря произвольной интенсивностью $\varkappa$:

$$\begin{aligned} \varkappa\dot{\bar{z}}_0 &= 2i\,\frac{\partial H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_0}, \quad \dot{\bar{z}}_k = 2i\,\frac{\partial H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}{\partial z_k}, \\ \varkappa\dot{z}_0 &= -2i\,\frac{\partial H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}{\partial \bar{z}_0}, \quad \dot{z}_k = -2i\,\frac{\partial H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{26}$$

Гамильтониан

$$H(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}) = -\frac{1}{4\pi}\left[\varkappa\sum_{k=1}^{N}\ln|z_0 - z_k|^2 + \sum_{1\le j<k\le N}\ln|z_j - z_k|^2\right]. \tag{27}$$

$z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ — комплексные переменные;
x_k, y_k — декартовы координаты k-го вихря;

Kirchhoff G., 1876

Стационарное вращение вихревого квадруполя ($N = 3$)

Квадруполь — конфигурация из трех одинаковых точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности радиуса $R > 0$ вокруг вихря с произвольной интенсивностью $\varkappa$

$$z_0(t) = 0, \qquad z_k = e^{i\Omega t} \cdot Re^{i[2\pi(k-1)/3]}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{28}$$

Угловая скорость вращения Ω

$$\Omega = \frac{\varkappa + 1}{2\pi R^2}, \tag{29}$$

Линейный анализ устойчивости

- *Неустойчивость*. Матрица линеаризации имеет собственные значения с положительной вещественной частью:

$$\varkappa > 1$$

  Morikawa, G.K., Swenson, E.V., 1971

- *Орбитальная устойчивость*:

$$\varkappa < -3, \qquad 0 < \varkappa < 1$$

- Резонанс 1:1, если

$$-3 < \varkappa < 0$$

  Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. RCD 2021.

Нормализация редуцированного гамильтониана на интервале $-3 < \varkappa < 0$

Гамильтониан, нормализованный до слагаемых четвертого порядка, имеет вид

$$
\begin{aligned}
W &= W_2 + W_4 + \dots && (30)\\
W_2 &= \omega_1|Z_1|^2 - \omega|Z_2|^2 + \omega|Z_3|^2 \\
W_4 &= C_{11}|Z_1|^4 + C_{12}|Z_1|^2|Z_2|^2 + C_{13}|Z_1|^2|Z_3|^2 + && (31)\\
&\quad + C_{22}|Z_2|^4 + C_{33}|Z_3|^4 + C_{23}|Z_2|^2|Z_3|^2 + D_1(Z_2^2\phi_3^2 + \overline{Z}_2^2\overline{Z}_3^2) + \\
&\quad + iD_2(Z_2\overline{Z}_2^2\overline{Z}_3 - Z_2^2 Z_3\overline{Z}_2) + iD_3(Z_3\overline{Z}_2\overline{Z}_3^2 - Z_2 Z_3^2\overline{Z}_3) + \dots \\
\omega_1 &= 1 + \varkappa, \qquad \omega = \sqrt{1-\varkappa}. && (32)
\end{aligned}
$$

Резонанс 1:1 (диагонализированный случа) имеет место на интервале $-3 < \varkappa < 0$.

- Применение теоремы Сокольского дало следующие результаты: нулевое равновесие системы с гамильтонианом $\widehat{W} = W_2 + W_4$ is *устойчиво*, если

$$-3 < \varkappa < 0, \qquad \varkappa \neq \varkappa_{1,2}$$
$$\varkappa_1 \approx -1.6053, \quad \varkappa_2 \approx -0.5529$$

- В точках резонансов 1:2, 1:3 и резонанса двукратного нуля (диагонализируемый случай) имеет место устойчивость, поскольку гамильтониан, нормализованный до слагаемых четвертой степени имеет туже форму, что и $\widehat{W}$.
- Вопрос об устойчивости в точной нелинейной постановке остается открытым в случае

$$\varkappa = 1, \qquad \varkappa = 0, \qquad \varkappa = -3, \qquad \varkappa = \varkappa_{1,2}.$$

References

Borisov, A. V., Mamaev, I. S., Mathematical Methods in the Dynamics of Vortex Structures. Moscow–Izhevsk, 2005.

Kurakin, L. G., Stability, Resonances, and Instability of the Regular Vortex Polygons in the Circular Domain, *Dokl. Phys.*, 2004, vol.49, no. 11, pp. 658–661.

Kurakin, L. G., Melekhov, A. P., Ostrovskaya, I. V., A Survey of the Stability Criteria of Thomson's Vortex Polygons outside a Circular Domain, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 2016, vol. 22, pp. 733.

Kurakin, L. G., Ostrovskaya, I. V., Nonlinear stability analysis of a regular vortex pentagon outside a circle, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 6, p. 1033.

Kurakin, L. G., Ostrovskaya, I. V. RCD. 2021. Vol. 26, No. 5, pp. 526–542.

Kunitsyn, A. N. and Markeev, A. P., Stability in Resonance Cases, in Surveys in Science and Engineering. *General Mechanics Series*, vol. 4, Moscow: VINITI, 1979, pp. 58–139.

References

Lerman, L. M., Markova L. M. On Stability at the Hamiltonian Hopf Bifurcation // RCD, 2009, vol. 14, no 1, pp. 148–162.

Markeev, A. P., Libration Points in Celestial Mechanics and Space Dynamics. Moscow: Nauka, 1978.

Morikawa, G.K., Swenson, E.V., *Phys. Fluids*, 1971, vol. 14, no. 6, pp. 1058–1073.

Sokol'sky, A. G., On the Stability of an Autonomous Hamiltonian System with Two Degrees of Freedom in the Case of Equal Frequencies // J. Appl. Math. Mech., 1974, vol. 38, no. 5, pp. 741–749.